数理解析研究所講究録
第 869 巻 1994 年 84-89

スカラー型梯子模型の Bethe-Salpeter 方程式の固有値

— 虚々実々 —

広島大学工学部　瀬藤憲昭
Setô Noriaki

佐賀大学情報処理センター　福井市男
Fukui Ichio

取り扱う方程式は

$$\left[m_1^2 + \boldsymbol{p}^2 + (p_4 - i\eta_1\sqrt{s})^2\right]\left[m_2^2 + \boldsymbol{p}^2 + (p_4 + i\eta_2\sqrt{s})^2\right]\phi(\boldsymbol{p}, p_4)$$
$$= \frac{\lambda}{\pi^2}\int d^4p' \frac{\phi(\boldsymbol{p}', p_4')}{\mu^2 + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')^2 + (p_4 - p_4')^2} \tag{1}$$

である。この方程式は、質量 m_1 と質量 m_2 の 2 粒子系が質量 μ の粒子を交換して作る、4 元運動量 $P = (\sqrt{s}, \mathbf{o})$ の束縛状態を梯子近似の枠内で記述している。$\phi(\boldsymbol{p}, p_4)$ は束縛状態の BS(Bethe-Salpeter) 振幅であり、η_1 と η_2 はそれらの和が 1 のパラメータであり、(1) は Wick 回転を行なったあとの表式である。この式は、1960 年代までの BS 方程式に関する解析的成果をまとめた中西先生の総説 [1] の (5·22) 式と同じである。式 (1) が記述する系を $[m_1 \Leftarrow \mu \Rightarrow m_2]$ 模型と書くことにする。$m_1 + m_2 = 2$ の単位系を選び、$m_1 = 1 + \Delta, m_2 = 1 - \Delta$ と置く。$0 \leq \Delta < 1$ であり、束縛状態の質量の自乗 s としては物理的領域 $0 \leq s < 4$ を考える。そして $\eta_1 = (1 + \Delta)/2, \eta_2 = (1 - \Delta)/2$ と取る。λ は質量次元+2 を持っているから、$4\lambda/(m_1 + m_2)^2$ をあらためて λ と置く。そして (1) を、s が与えられた時の λ に対する固有値方程式と見なすのである。

ここで調べるのはλが実数か複素数かということである。これまでに解析的にわかっていることは

◎ $[1 \Leftarrow 0 \Rightarrow 1]$ 模型：つまり等質量 Wick-Cutkosky[2] 模型ではλは実数

◎ $[1+\varDelta \Leftarrow 0 \Rightarrow 1-\varDelta]$ 模型：つまり非等質量 Wick-Cutkosky 模型では、Wick-Cutkosky 変換によりこの模型は等質量 ($\varDelta=0$) の場合に帰着できるからλはやはり実数

◎ $[1 \Leftarrow \mu \Rightarrow 1]$ 模型：つまり等質量スカラー型梯子模型では式 (1) は明白に実数形の積分方程式であるからλは実数 (文献 [1] の§7参照)

である。問題は

◎ $[1+\varDelta \Leftarrow \mu \Rightarrow 1-\varDelta]$ 模型：つまり非等質量スカラー型梯子模型

である。この場合には ($\mu=0$の場合とは異なり) 等質量模型に帰着させる変換は存在せず、λの虚・実に関する解析的結果は得られていないが、いくつかの解析的および数値的議論はなされている。

まず解析的議論として、Naito-Nakanishi[3] は$\lambda(s)$がsの関数として分枝点を持たなければλは実数であることを証明した。これに対して Ida[4] は、λに関するそのような解析的性質は期待できないと論じた。また数値計算により zur Linden[5] はs-波の $[1.6 \Leftarrow 1 \Rightarrow 0.4]$ 模型を解析し固有値がすべて実数であることを見出した。同じ模型を数値解析した Kaufmann[6] は、これに反して、sが擬敷居値 ($=4\varDelta^2=1.44$) の周りで第1と第2の励起状態は互いに複素共役な固有値を持つと報告している。これらは1969年から70年にかけての話であるが、将に虚々実々の状況であった。

それから15年余りのちの1986年、中西先生の主催する「Bethe-Salpeter方程式の解の挙動」の小研究会が基礎物理学研究所で開かれ、会の主な目的は、総説[1]以降のBS方程式に関する発展を概観し、併せて（その間の電算機の急速な発達を踏まえて）高精度の数値計算により非等質量スカラー型梯子模型の固有値の虚・実を明らかにすることであった。研究会の成果は中西先生が編集された文献[7]に発表済みであるが、虚・実の問題は残念ながら決着を見なかった。

その研究会から早くも6年、中西先生が還暦をおむかえになるにあたり、この虚・実問題に始末をつける計算を行なうことにした。数値計算の詳しい方針や結果は文献[8]に発表予定であるので、ここではそれらの大略を紹介し、併せて文献[5], [6]との比較を行なうことにする。方程式(1)は3次元運動量空間における回転に関して不変であるので、$\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$について変数分離を行なう。これより、良い量子数としてl(方位量子数)とm(磁気量子数)が得られる。lとmを指定するとBS振幅ϕは$|p|$(4元運動量の大きさ)とp_4の関数となる。この関数を$p_4/|p|$に関してGegenbauer多項式で展開すると、その係数は$|p|$のみに依存する。変数変換$|p| \to z := \sqrt{(|p|^2-1)/(|p|^2+1)}$を施すと、数値解析の対象となる方程式として

$$\frac{1}{\lambda} g_{L,l}(z) \ = \ \sum_{L'=l}^{\infty} \int_{-1}^{1} dz' \, K_{LL',l}(z,z') g_{L',l}(z') \quad (L = l, l+1, \ldots) \qquad (2)$$

が出る。この方程式は、(1)を記号的に$A\phi = \lambda B\phi$と表すと、これを変形した$\lambda^{-1}\phi = A^{-1}B\phi$に部分波展開を施して得られたものである。$L$は4次元

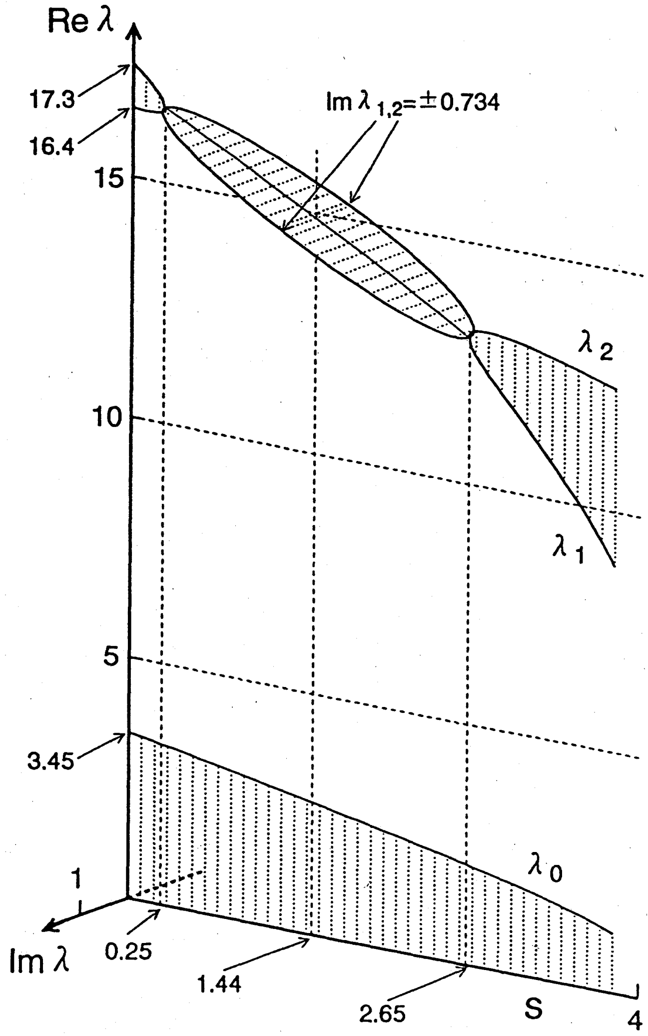
の角運動量の大きさである。行列形の積分核関数 $K_{LL',l}(z,z')$ は極めて複雑であり、その具体形は [8] を参照していただくとして、大切なことはこれが実数の値を取ることである。演算子 $A^{-1}B$ は Δ が零でない限り虚数単位 i を陽に含むが、その i は BS 振幅 ϕ を $g_{L,l}$ で展開したときの位相因子に押し込めることが出来る。(2) を計算機にかけるために L' に関する和を途中 ($L' = L_c$) で打切り、z' に関する積分を Gauss-Legendre の数値積分公式に置き換える。そして得られた $(L_c - l + 1) \cdot N$ 次行列の固有値方程式

$$\frac{1}{\lambda} g_{L,l}(z_j) = \sum_{L'=l}^{L_c} \sum_{k=1}^{N} K_{LL',l}(z_j, z_k) w_k \, g_{L',l}(z_k)$$

$$(L = l, l+1, \cdots, L_c, \quad j = 1, 2, \cdots, N) \tag{3}$$

を解くのである。上式で $z_1, \cdots, z_N$ は区間 [-1,1] 上の Gauss-Legendre 点であり、$w_1, \cdots, w_N$ は各点に対応する重みである。

具体的には s-波 ($l = 0$) の $[1.6 \Leftarrow 1 \Rightarrow 0.4]$ 模型で、$L_c = 7$, $N = 45$ と選んで得られる 360×360 行列に、適当な試行ベクトルから出発して反復法を施し、λ の (絶対値が) 小さい (つまり $1/\lambda$ の大きい) 順に近似固有値を求めた。ただし単純な (固有値を一つずつ大きさの順に抜き出す) 反復法では、実数成分の試行ベクトルを採用すると、すべての計算は実数の範囲内で片付き固有値 (の候補) も実数になってしまう。これでは虚・実の判定が出来ないので、反復の各段階で主要な二つ (か三つ) の固有値と固有ベクトルの候補を抜き出し、結果として得られる 2 次 (か 3 次の) 方程式の根から近似固有値を導いた。計算結果は次の図のようになった。



この図を見ると$0.25 < s < 2.65$の範囲で第1と第2の励起状態の固有値が複素共役な対をなし、擬數居値$s = 1.44$の近くでそれらの虚部は実部の5%に達することがわかる。ここでzur Linden[5]の計算結果を検討すると、彼は式(1)の形$\lambda^{-1}A\phi = B\phi$のままで部分波分解を行ない、分解により5重対角行列となるAを(数値的に?)対角化し、100×100行列に反復法を適用してすべての固有値が実数であることを見出したのである。5%の虚部を見つける精度を持たなかったのか、先に述べた単純な反復法を用いたものと思われる。一方Kaufmann[6]は適当な内積(,)を定義して$\lambda^{-1} = (\phi, B\phi)/(\phi, A\phi)$に変分法を適用し、28×28行列の固有値問題を解き、この図に極めて近い結果を導いている。あまり大きくない行列で高精度の数値を得たのは、変分原理の出発点となる試行関数の選び方が賢明であったからであろう。

ここで、近似式(3)で得られた数値の精度を見積もっておく。擬數居値上で非等質量Wick-Cutkosky模型の固有値は正確に計算出来ることが知ら

れており、換算固有値 λ^R は s-波の場合 2, 6, 6, $\cdots$ である（文献 [7], 9 頁の (3·18) 参照）。この模型の固有値方程式は（(2) 式のような無限連立積分方程式ではなく）単独の積分方程式に帰着できるが、それをわざわざ (3) 式で $\mu = 0$ と置いて解いた結果が下の表である。例えば $\Delta = 0.6$ で第 1 と第 2 の励起状態の固有値が 1 %以内に納まっていることが見て取れる。

表　$[1+\Delta \Leftarrow 0 \Rightarrow 1-\Delta]$ 模型の $s = 4\Delta^2$ における換算固有値

Δ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
λ_0^R	1.9984	1.9984	1.9984	1.9984	1.9984	1.9982	1.9980	1.9973
λ_1^R	5.9856	5.9853	5.9845	5.9824	5.9780	5.9700	5.9571	5.9322
λ_2^R	5.9857	5.9862	5.9869	5.9888	5.9923	5.9982	6.0063	6.0193

謝辞

6 年前の小研究会以来、その存在をうっかり忘れていた文献 [6] に注意を向けていただいた中西先生に感謝すると共に、先生の今後益々のご活躍をお祈り申し上げます。

引用文献

[1] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 43 (1969), 1.
[2] G. C. Wick, Phys. Rev. **96** (1954), 1124.
R. E. Cutkosky, Phys. Rev. **96** (1954), 1135.
[3] S. Naito and N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **42** (1969), 402.
[4] M. Ida, Prog. Theor. Phys. **43** (1970), 184.
[5] E. zur Linden, Nuovo Cim. **63A** (1969), 181.
[6] W. B. Kaufmann, Phys. Rev. **187** (1969), 2051.
[7] N. Nakanishi(ed.), Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 95 (1988), 1.
[8] N. Setô and I. Fukui, Prog. Theor. Phys. **89** (1993), 205.